ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NGUYỄN BÁ ĐÔN

MỘT PHƯƠNG PHÁP TÁCH
GIẢI MỘT LỚP BÀI TOÁN CÂN BẰNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NGUYỄN BÁ ĐÔN

MỘT PHƯƠNG PHÁP TÁCH GIẢI MỘT LỚP BÀI TOÁN CÂN BẰNG

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : 8460112

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS. TSKH. LÊ DŨNG MƯU

Thái Nguyên - Năm 2018

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình và sự chỉ bảo nghiêm khắc của thầy giáo GS. TSKH. Lê Dũng Mưu (Trường Đại học Thăng Long Hà Nội). Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc nhất đến thầy.

Tác giả cũng xin kính gửi lời cảm ơn đến cô giáo PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy cùng các thầy, cô giáo tham gia giảng dạy khóa học cao học 2016 - 2018, những người đã tâm huyết giảng dạy và trang bị cho tác giả nhiều kiến thức cơ sở.

Xin gửi lời cảm ơn đến Ban giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán - Tin Trường ĐHKH, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập tại trường.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K10A đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Tuy bản thân có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp quý báu của Quý thầy, cô cùng toàn thể bạn đọc.

Tác giả

LỜI NÓI ĐẦU

Cho H là một không gian Hilbert thực với tích vô hướng $\langle .,. \rangle$ và chuẩn $\|.\|$ tương ứng. Cho C là một tập lồi, đóng, khác rỗng trong H và f là song hàm từ $C \times C$ vào $\mathbb{R}$ sao cho $f(x,x) = 0$ với mọi $x \in C$. Trong luận văn này ta sẽ xét bài toán cân bằng sau đây, được ký hiệu là EP(C, f):

$$\text{Tìm } \; x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0, \quad \forall y \in C. \tag{1}$$

Bài toán EP(C, f) còn được gọi là bất đẳng thức Ky Fan để ghi nhận sự đóng góp của ông trong lĩnh vực này.

Bất đẳng thức (1) lần đầu tiên, năm 1955, được Nikaido và Isoda dùng trong trò chơi không hợp tác. Năm 1972, Ky Fan gọi (1) là bất đẳng thức minimax và đưa ra một định lý về sự tồn tại nghiệm cho bài toán này trong không gian hữu hạn chiều. Ngay trong năm đó, định lý này được mở rộng ra trong không gian vô hạn chiều bởi Brésis và Stampacchia. Năm 1984, L.D. Muu gọi (1) là bài toán bất đẳng thức biến phân và nghiên cứu tính ổn định cho bài toán này. Năm 1992, lần đầu tiên (1) được gọi là bài toán cân bằng trong tài liệu [9].

Các nghiên cứu về bài toán cân bằng có thể chia theo hai hướng chính bao gồm những nghiên cứu về sự tồn tại nghiệm và các thuật toán giải bài toán cân bằng. Cho đến nay người ta đã đưa ra nhiều phương pháp để giải bài toán cân bằng chẳng hạn như phương pháp chiếu và các biến dạng của nó. Tuy nhiên, để tăng cường sự hiệu quả người ta đã nghiên cứu các phương pháp tách(splitting method) để giải bài toán cân bằng.

Mục đích của bản luận văn này là giới thiệu những kiến thức cơ bản nhất của bài toán cân bằng và trình bày một phương pháp tách giải một lớp bài toán cân bằng mới được công bố gần đây.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày một số khái niệm cơ bản liên quan đến đề tài. Các vấn đề liên quan đến sự tồn tại nghiệm và các trường hợp riêng của bài toán cân bằng cũng được đề cập đến.

Chương 2 trình bày hai thuật toán tách giải bài toán cân bằng trong đó song hàm là tổng của hai song hàm. Thuật toán đầu là một thuật toán tách tuần tự, thuật toán sau là một thuật toán tách song song.

MỘT SỐ KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

H: Không gian Hilbert thực;
X: Không gian Banach thực;
$\mathbb{R}$: Tập các số thực;
$\emptyset$: Tập rỗng;
I: Ánh xạ đồng nhất;
$\langle a, b \rangle$ = Tích vô hướng của 2 véc-tơ a và b;
$\|x\|$ = Chuẩn của x;
$\partial f(x)$: Dưới vi phân của hàm f tại x;
$\forall x$: Với mọi x;
$x^n \to x$: Dãy $\{x^n\}$ hội tụ mạnh tới x;
$x^n \rightharpoonup x$: Dãy $\{x^n\}$ hội tụ yếu tới x;
$x := y$: Nghĩa là, x được định nghĩa bằng y;
$P_C(x)$: Hình chiếu của x lên C.

Chương 1

Bài toán cân bằng

Chương này trình bày các khái niệm liên quan đến bài toán cân bằng, sự tồn tại nghiệm, các tính chất cơ bản và các trường hợp riêng quan trọng của bài toán cân bằng. Các kiến thức trong chương được trích từ tài liệu [1-4], [7], [10].

1.1 Một số khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1.1._(xem [4]) Cặp_ $(H, \langle , \rangle)$ _trong đó_ H _là một không gian tuyến tính thực và_

$$\langle , \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

thỏa mãn các điều kiện:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in H; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in H;$
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in H;$
4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in H.$

được gọi là không gian tiền Hilbert.
Không gian tiền Hilbert đầy đủ được gọi là không gian Hilbert.
Ví dụ 1.1. $L^2_{[a,b]}$ là không gian các hàm bình phương khả tích trên [a,b] với $f \in L^2_{[a,b]}$ sao cho $\int_a^b f^2(x)\,dx < +\infty$ là một không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx;$$

và chuẩn

$$\|f\|_{L^2_{[a,b]}} = \left(\int_a^b f^2 (x) dx \right)^{\dfrac{1}{2}}.$$

Trên H có hai kiểu hội tụ chính sau:
Định nghĩa 1.2._(xem [4]) Xét dãy_ $\{x_n\}_{n\geq 0}$ _và_ x _thuộc không gian Hilbert thực_ H. _Khi đó:_

- _Dãy_ $\{x_n\}$ _được gọi là hội tụ mạnh tới_ x, _ký hiệu_ $x_n \to x$, _nếu như_
$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0.$$
- _Dãy_ $\{x_n\}$ _được gọi là hội tụ yếu tới_ x, _ký hiệu_ $x_n \rightharpoonup x$, _nếu_
$$\lim_{n\to+\infty} \langle \omega, x_n\rangle = \langle \omega, x\rangle , \quad \forall \omega \in H.$$

Ta nhắc lại các kết quả trong giải tích hàm (xem [4]) liên quan đến hai loại hội tụ này.

Mệnh đề 1.1.

- _Nếu_ $\{x_n\}$ _hội tụ mạnh đến_ x _thì cũng hội tụ yếu đến_ x.
- _Mọi dãy hội tụ mạnh (yếu) đều bị chặn và giới hạn theo sự hội tụ mạnh (yếu) nếu tồn tại là duy nhất._
- _Nếu không gian Hilbert thực_ H _là không gian hữu hạn chiều thì sự hội tụ mạnh và sự hội tụ yếu là tương đương._
- _Nếu_ $\{x_n\}_{n\geq 0}$ _là một dãy bị chặn trong không gian Hilbert thực_ H _thì ta trích ra được một dãy con hội tụ yếu._
- _Nếu_ $\{x_n\}_{n\geq 0}$ _là một dãy bị chặn trong không gian Hilbert thực hữu hạn chiều_ H _thì ta trích ra được một dãy con hội tụ mạnh._

Tiếp theo, ta sẽ nêu một số định nghĩa và kết quả cơ bản của giải tích lồi được phát biểu trong [1], [10].
Xét C là tập con khác rỗng trong không gian Hilbert thực H.

Định nghĩa 1.3._(xem [10]) Tập_ C _trong không gian Hilbert thực_ H _được gọi là một tập lồi nếu_

$$\forall x, y \in C,\ \forall \lambda \in [0, 1] \quad \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

Định nghĩa 1.4.*(xem [10]) Điểm a được gọi là điểm biên của C nếu mọi lân cận của a đều có điểm thuộc C và điểm không thuộc C;*
Tập C được gọi là tập đóng nếu C chứa mọi điểm biên của nó;
Tập C được gọi là một tập compact nếu C là một tập đóng và bị chặn.

Định nghĩa 1.5.*(xem [10]) Cho C là một tập lồi của không gian Hilbert H và $x \in C$.*
Nón pháp tuyến ngoài của C được ký hiệu và định nghĩa bởi:

$$N_C(x) := \{\mathrm{w} | \langle \mathrm{w}, y - x \rangle \leq 0, \quad \forall y \in C\}.$$

Định nghĩa 1.6.*(xem [10]) Xét hàm $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Khi đó:*
(i) Hàm f được gọi là hàm lồi trên H nếu

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \quad \forall x, y \in H, \forall \lambda \in (0,1);$$

(ii) Hàm f được gọi là hàm lồi chặt trên H nếu

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \quad \forall x \neq y \in H, \forall \lambda \in (0,1);$$

(iii) Hàm f được gọi là hàm lồi mạnh trên H với hệ số $\eta > 0$ nếu

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \eta \frac{\lambda(1-\lambda)}{2} \|x - y\|^2,$$

với mọi $x, y \in H, \forall \lambda \in (0,1)$.
Dưới đây là một số ví dụ quen thuộc về hàm lồi.
Ví dụ 1.2.
1. Hàm affine. $f(x) = a^T x + b$, trong đó $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$ là hàm lồi. Nó thoả mãn đẳng thức

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \quad \forall x, y \in H, \lambda \in (0,1).$$

Do đó nó không lồi chặt.
Cho $C \neq \emptyset$ là một tập lồi.
2. Hàm chỉ. Đặt

$$\delta_C := \begin{cases} 0 \,\text{khi}\, x \in C \\ +\infty \,\text{khi}\, x \notin C \end{cases}$$

Ta nói δ_C là *hàm chỉ* của C. Do C lồi nên δ_C là hàm lồi.
3. Hàm khoảng cách. Giả sử C là một tập đóng, khác rỗng. *Hàm khoảng cách* $d_C(y)$ được định nghĩa như sau:

$$d_C(y) = \inf_{x \in C} \|x - y\|.$$